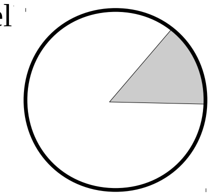
Entrenamientos Estatales 2018
EXAMEN SELECTIVO 2 - SOLUCIONES

PRIMARIA

8 DE ABRIL DE 2018

1. Esteban comió una rebanada de pastel que representaba el 15% del pastel. ¿Cuánto mide el ángulo que abarca la rebanada de pastel?



Solución.

El pastel completo representa el 100 % y abre un ángulo de 360°. **[2 puntos]**

Por lo que el ángulo que representa el 15 % es 360 × 15 ÷ 100 = 54°. **[5 puntos]**

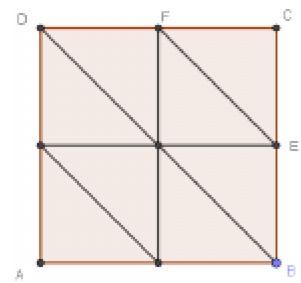
2. Un reloj digital de 24 horas muestra el tiempo de 00:00:00 a 23:59:59. A las 13:21:32 los primeros tres dígitos son los mismos que los últimos tres y aparecen en el mismo orden. Encuentra el número de veces que esto pasa a lo largo de un día.

Solución. Tenemos dos casos:

a) Si el primer dígito es 0 ó 1, el 2do y tercer dígito pueden ser 0,1,2,3,4,5; los demás quedan determinados. En este caso, por principio multiplicativo hay $2×6×6 = 72$ posibilidades. **[3 puntos]**

b) Si el primer dígito es 2, el segundo dígito puede ser 0,1,2,3 y el tercer dígito puede ser 0,1,2,3,4,5 y los demás quedan determinados. Entonces en este caso son $1×4×6 = 24$ posibilidades. **[3 puntos]**

Por lo tanto, en total son $2×6×6 + 1×4×6 = 96$ veces que pasa lo deseado. **[1 punto]**



3. Los puntos E y F son los puntos medios de los lados BC y CD del cuadrado ABCD. El área del triángulo AEF es 216 cm^2. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado ABCD?

Solución. Si representamos como x el área del triángulo ECF, el área del cuadrado ABCD se puede calcular en términos de x como 8x. **[1 punto]**

Luego, vemos que las áreas de los triángulos AFD y ABE valen 2x, porque sus bases DF y EB son iguales a la base CF del triángulo ECF y sus alturas AD y AB miden el doble que la altura CE del triángulo ECF. Sumando las áreas de los triángulos ECF, AFD y ABE valen 5x.

[3 puntos]

Por lo tanto el área del triángulo AEF, que es la diferencia del cuadrado menos los triángulos ECF, AFD y ABE, vale 8x-5x = 3x, pero el problema nos dice que es igual a 216, de donde x = 72. **[2 puntos]**

Por lo tanto el área del cuadrado es 8x=576. Entonces el lado del cuadrado es la raíz cuadrada de 576 que es igual a 24 cm. **[1 punto]**

4. En un tablero de 2018 × 2018 se enumeran las filas del 1 al 100 y también las columnas del 1 al 100. Arlette escoge las columnas 1, 4, 7, 10, 13, ..., las filas 2, 9, 16, 23, 30, …, y coloca una ficha en cada una de las intersecciones de éstas. ¿Cuántas fichas colocó Arlette en el tablero?

Solución.

Arlette escoge las columnas de 3 en 3 empezando en 1, entonces va eligiendo a las columnas de la forma 3n-2 y la última columna que elige es la 2017. Ahora, si 3n-2=2017, entonces n=673 es el número de columnas que escogió Arlette. **[3 puntos]**

De la misma manera, escoge las filas de 7 en 7 empezando en la fila 2, entonces va eligiendo a las filas de la forma 7m-5 y la última que elige es la 2018. Ahora, si 7m-5=2018, entonces m=289 es el número de filas que escogió Arlette. **[3 puntos]**

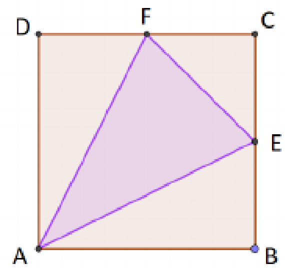
Finalmente, número de fichas que coloca Arlette es 673 ×289 = 194, 497. **[1 punto]**

Entrenamientos Estatales 2018
EXAMEN SELECTIVO 2 - SOLUCIONES

1ro Secundaria

8 DE ABRIL DE 2018

1. Un reloj digital de 24 horas muestra el tiempo de 00:00:00 a 23:59:59. A las 13:21:32 los primeros tres dígitos son los mismos que los últimos tres y aparecen en el mismo orden. Encuentra el número de veces que esto pasa a lo largo de un día.



2. Los puntos E y F son los puntos medios de los lados BC y CD del cuadrado ABCD. El área del triángulo AEF es 216 cm^2. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado ABCD?

3. José hace una lista con todos los números del 1 al 2018. Él encierra en un círculo todos los números que son múltiplos de 6. Luego, encierra en un círculo todos los números que son múltiplos de 7. Finalmente, José multiplica todos los números que encerró. ¿Cuál es la mayor potencia de 11 que divide exactamente al resultado de esta multiplicación?

Solución.
Como queremos encontrar una potencia de 11, solo nos fijaremos en los múltiplos de 11 que son comunes con 6 y lo mismo para los que son comunes con 7, es decir, nos fijaremos solamente en los múltiplos de 66 y 77. **[1 punto]**
Primero, los múltiplos de 6 que tienen múltiplos de 11, son los de la forma 66n. Como $2018 \div 66 = 30.5\ldots$, entonces del 1 al 2018 caben 30 múltiplos de 66, a decir, 66, 66×2, 66×3, … 66×30. **[1 punto]**
La multiplicación de estos es entonces $66^{30}\times30!$ que contiene un 11^{30} por el 66^{30} y además otro 11^2 del 30!. **[1 punto]**
De las misma manera, los múltiplos de 7 que tienen múltiplos de 11, son los de la forma 77n. Como $2018\div77 = 26.2\ldots$, entonces del 1 al 2018 caben 26 múltiplos de 77. **[1 punto]**
La multiplicación de estos es entonces $77^{26}\times26!$ que contiene un 11^{26} por el 77^{26} y además otro 11^2 del 26!. **[1 punto]**
Hasta acá llevamos una potencia de 11 igual a 30+2+26+2 = 60.
Pero tenemos que tener cuidado porque los números de la forma $6\times7\times11\times n$ los estamos contando 2 veces (una vez por el 6 y otra vez por el 7). Como $6\times7\times11=462$, y $2018 \div 462=4.3...$, entonces los 11's de 462, 462×2, 462×3 y 462×4 los estamos contando 2 veces, es decir, hay 4 repeticiones. **[1 punto]**
Por lo tanto la máxima potencia de 11 que divide al número de José es 11^{56} (o simplemente 56). **[1 punto]**

4. Se tiene cierto número de bolsas acomodadas en una fila. En ella se meten dulces de la siguiente forma: en la primera bolsa se mete un dulce, en la segunda bolsa dos, en la tercera tres y así sucesivamente. Itzel escoge la bolsa que tiene 14 dulces menos que la última bolsa de la fila y observa que la suma de todos los dulces de la bolsas que están a la derecha de la que escogió es igual a la suma de las que están a la izquierda. ¿Cuántos dulces tiene la bolsa que Itzel escogió?

Solución.
Sea n la bolsa que eligió Itzel. Entonces en total hay n+14 bolsas. **[1 punto]**
La suma de las bolsas a la izquierda de en es $1+2+3+...+n-1 = (n-1)n \div 2$. **[2 puntos]**
La suma de las bolsas a la derecha de n es $n+1+n+2+...+n+14= 14n + 1+2+3+...14 = 14n + 105$. **[2 puntos]**
Como ambas suman son iguales, debemos tener $(n-1)n \div 2 = 14n + 105$, esta ecuación se simplifica a $n^2-29n -210 = 0$, y notamos que $n^2-29n -210 =(n-35)(n+6)$. **[2 puntos]**
Por lo tanto la bolsa que eligió Itzel fue n=35. **1 punto**

Entrenamientos Estatales 2018
EXAMEN SELECTIVO 2 - SOLUCIONES

2do Secundaria

8 DE ABRIL DE 2018

1. En la siguiente operación cada letra representa un dígito,

$$5 \times ACCC = 2 \times CCCB$$

Encuentra los valores de A, B y C.

Solución.

Primero observamos que 2×CCCB va a terminar en un número par, entonces 5×ACCC también va a terminar en un número par y además múltiplo de 5, de aquí que tiene que ser 0. De aquí que C es par y B debe ser 0 ó 5. **[2 puntos]**

Si B=0 tenemos, 2220×2 = 4440, 4440×2=8880, 6660×2 = 13 320 y 8880×2 = 17 760.

Si B=5 tenemos 2225×2 = 4450, 4445×2=8890, 6665×2=13 330 y 8885×2 = 17 770.

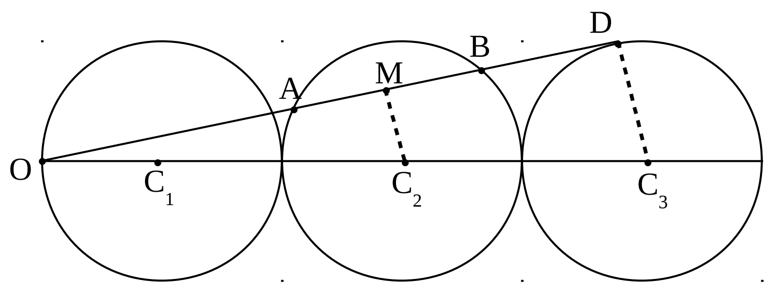
Ahora, A222×5 = *110, A444×5 = *220, A666×5 = *330 y A888×5 = *440. Donde el * representa un número de uno o dos dígitos. **[4 puntos con todas las multiplicaciones anteriores]**

Comparando las terminaciones para cada posible valor de C vemos que el único que puede ser es A666×5 = 6665×2 = 13 330. De donde A=2, B=5 y C=6. **[1 puntos]**

2. José hace una lista con todos los números del 1 al 2018. Él encierra en un círculo todos los números que son múltiplos de 6. Luego, encierra en un círculo todos los números que son múltiplos de 7. Finalmente, José multiplica todos los números que encerró. ¿Cuál es la mayor potencia de 11 que divide exactamente al resultado de esta multiplicación?

3. Se tiene cierto número de bolsas acomodadas en una fila. En ella se meten dulces de la siguiente forma: en la primera bolsa se mete un dulce, en la segunda bolsa dos, en la tercera tres y así sucesivamente. Itzel escoge la bolsa que tiene 14 dulces menos que la última bolsa de la fila y observa que la suma de todos los dulces de la bolsas que están a la derecha de la que escogió es igual a la suma de las que están a la izquierda. ¿Cuántos dulces tiene la bolsa que Itzel escogió?

4. Las tres circunferencias de la figura tienen el mismo radio r = 5 cm y sus centros caen sobre la misma recta. La circunferencia de en medio es tangente a las otras dos. Desde el punto O se traza una tangente a la circunferencia de centro C_3. Halla la longitud del segmento AB interceptado por la circunferencia central.



Solución.

Primero observamos que como OD es tangente a la circunferencia 3 entonces el ángulo ODC_3 es recto. **[1 punto]**

Ahora trazamos la perpendicular desde C_2 a AB y llamamos a M el punto de intersección. Notamos que M tiene que ser punto medio de la cuerda AB. **[2 puntos]**

Ahora, el triángulo OC_2D es semejante al triángulo OC_3D, de aquí que $\frac{C_2M}{C_3D}=\frac{OC_2}{OC_3}=\frac{15}{25}$, ya que OC_2 = 15 y OC_3=25 por ser tres radios y 5 radios, respectivamente. **[2 puntos]**

También C_3D=5 y entonces C_2M=3. **[1 punto]**

Finalmente, por Pitágoras en el triángulo C_2MB se tiene que C_2B=5 y C_2M=3, por lo que MB=4.

Por lo tanto AB=2×MB= 8 cm. **[1 punto]**

Entrenamientos Estatales 2018
EXAMEN SELECTIVO 2 - SOLUCIONES

3ro Secundaria

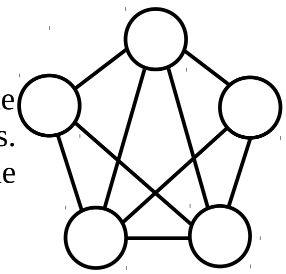
8 DE ABRIL DE 2018

1. En la siguiente operación cada letra representa un dígito,

$$5 \times ACCC = 2 \times CCCB$$

Encuentra los valores de A, B y C.

2. El diagrama muestra 5 círculos, algunos de los cuales están unidos por segmentos de recta. Se tienen 5 colores disponibles, pero no es necesario que se usen todos. Encuentra el número de maneras diferentes de pintar los círculos de manera que círculos conectados por un segmento queden de diferente color.



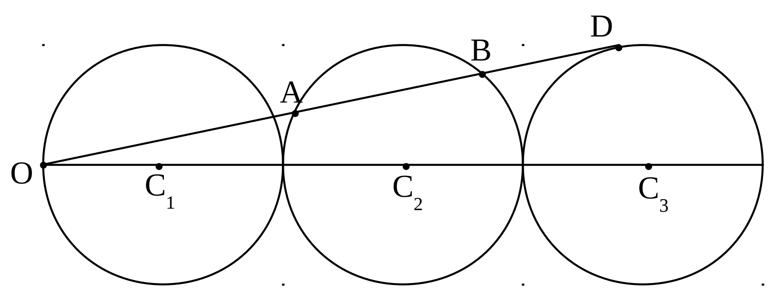
Solución. Tenemos dos casos:

a) Se usan todos los colores. Aquí hay 5×4×3×2×1=120 de colorear los círculos. **[2 puntos]**

b)No se usan todos los colores. En este caso, como solo hay un segmento que falta solo esos dos círculos pueden ir del mismo color y los demás tienen que ir todos de colores distintos, entonces a fuerza se tienen que usar 4 colores. Ahora, para elegir el color que va en esos dos círculos con el mismo color hay 5 posibilidades, luego para otro círculo hay 4, para otro círculo hay 3 y para el último círculo hay 2, entonces son 5×4×3×2=120 maneras de colorear los círculos en este caso. **[4 puntos]**

Entonces en total hay 120+120=240 maneras de colorear los círculos de la manera deseada. **[1 punto]**

3. Las tres circunferencias de la figura tienen el mismo radio r = 5cm y sus centros caen sobre la misma recta. La circunferencia de en medio es tangente a las otras dos. Desde el punto O se traza una tangente a la circunferencia de centro C_3. Halla la longitud del segmento AB interceptado por la circunferencia central.



Entrenamientos Estatales 2018
EXAMEN SELECTIVO 2 - SOLUCIONES

3ro Secundaria

4. José hace una lista con todos los números del 1 al 2018. Él encierra en un círculo todos los números que son múltiplos de 6. Luego, encierra en un círculo todos los números que son múltiplos de 8. También, encierra todos los que son múltiplos de 9. Finalmente, José multiplica todos los números que encerró. ¿Cuál es la mayor potencia de 11 que divide exactamente al resultado de esta multiplicación?

Solución.
Como queremos encontrar una potencia de 11, solo nos fijaremos en los múltiplos de 11 que son comunes con 6 y lo mismo para los que son comunes con 8 y 9, es decir, nos fijaremos solamente en los múltiplos de 66, 88 y 99 . **[1 punto]**

Primero, los múltiplos de 6 que tienen múltiplos de 11, son los de la forma 66n. Como 2018÷66 = 30.5…, entonces del 1 al 2018 caben 30 múltiplos de 66, a decir, 66, 66×2, 66×3, … 66×30.

La multiplicación de estos es entonces $66^{30}\times 30!$ que contiene un 11^{30} por el 66^{30} y además otro 11^{2} del 30!.

De las misma manera, los múltiplos de 8 que tienen múltiplos de 11, son los de la forma 88n. Como 2018÷88 = 22.9…, entonces del 1 al 2018 caben 22 múltiplos de 88.

La multiplicación de estos es entonces $88^{22}\times 22!$ que contiene un 11^{22} por el 88^{22} y además otro 11^{2} del 22!.

De las misma manera, los múltiplos de 9 que tienen múltiplos de 11, son los de la forma 99n. Como 2018÷99 = 20.3…, entonces del 1 al 2018 caben 20 múltiplos de 99.

La multiplicación de estos es entonces $99^{20}\times 20!$ que contiene un 11^{20} por el 99^{20} y además otro 11 del 20!.
[3 puntos por toda esta parte; 2 puntos si solo tiene un caso bien hecho, ya sea del 66 o del 88 o del 99]

Hasta acá llevamos una potencia de 11 igual a 30+2+22+2+20+1 = 77.

Pero tenemos que tener cuidado porque los números de la forma 24×11×n los estamos contando 2 veces (una vez por el 6 y otra vez por el 8). Como 24×11=264, y 2018 ÷ 264=7.6..., entonces los 11’s de 264, 264×2,…, 264×7 los estamos contando 2 veces, es decir, hay 7 repeticiones.

Lo mismo pasa con los de la forma 18×11×n los estamos contando 2 veces (una vez por el 6 y otra vez por el 9). Como 18×11=198, y 2018 ÷ 198=10.1..., entonces los 11’s de 198, 198×2,…, 198×10 los estamos contando 2 veces, es decir, hay 10 repeticiones. **[1 punto]**

Hasta aquí llevamos contados un total 77-7-10 = 60 factores 11’s.

Ahora, analizamos números de la forma 72×11×n. Éstos los consideramos una vez al contar los de 88n, una vez al contar los de de 99n, pero también los restamos una vez por los de 24×11×n y también los restamos una vez por los de 18×11×n. Entonces de hecho, no los hemos contado. Como 72×11=792, y 2018 ÷ 792=2.5..., entonces los 11’s de 792 y 792×2 los necesitamos incluir en la cuenta y de estos son 2. **[1 punto]**

Por lo tanto la máxima potencia de 11 que divide al número de José es 11^{62} (o simplemente 62). **[1 punto]**